Université Ibn Khaldoun
Faculté des sciences de la matière
Département de physique

Niveau : 2e année physique
Module : Thermodynamique
A.U : 2023-2024 Durée : 1H30

Corrigé d'examen final

Exercice 1 **(06 points)**

1- La différentielle $\boldsymbol{dV}$ fonction de $\boldsymbol{dT}$ et $\boldsymbol{dP}$ en fonction de $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\chi_T}$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP$$ 0.5

Avec

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \alpha V$$ 01

$$\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\chi_T V$$ 0.5

Alors

$$\boxed{dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP = \alpha V dT - \chi_T V dP}$$ 01

2- **L'équation d'état**

Remplaçons $\alpha = R/PV$ et $\chi_T = RT/VP^2$ dans la dernière expression, on obtient 01

$$dV = \alpha V dT - \chi_T V dP = (RV/PV)dT - (RTV/VP^2)dP = (R/P)dT - (RT/P^2)dP$$

$$dV = \frac{R}{P}dT - \frac{RT}{P^2}dP = \frac{RPdT - RTdP}{P^2} = R\left(\frac{PdT - TdP}{P^2}\right) = Rd\left(\frac{T}{P}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow dV = Rd\left(\frac{T}{P}\right)}$$ 01

Par intégration de l'expression précédente, on obtient

$$V = \int Rd\left(\frac{T}{P}\right) = R\frac{T}{P} + C$$ 0.25

Où C est la constante d'intégration.

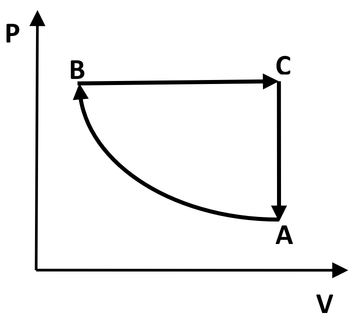
Appliquons la condition donnée pour $V = 2b$ on a $T = bP/R$, on obtient

$$\Rightarrow 2b = R\frac{bP}{RP} + C = b + C \Rightarrow C = 2b - b = b$$ 0.25

Alors

$$\boxed{V = R\frac{T}{P} + b}$$ 0.5

Exercice 2 **(06 points)**



1- **Calcul des volumes $\boldsymbol{V_A}$, $\boldsymbol{V_B}$ et $\boldsymbol{V_C}$ et la température $\boldsymbol{T_C}$.**

<u>Sommet A</u> : $P_A V_A = RT_A \Rightarrow V_A = {RT_A}/{P_A} = {8.31 * 301}/{1.10^5} = 0.025\, m^3$ 0.5

$\boxed{V_A = 25\, l}$ 0.5

<u>Sommet B</u> : $T_A = T_B$ (puisque la transformation AB est un isotherme)

$$P_B V_B = RT_B \Rightarrow V_B = {RT_B}/{P_B} = {8.31 * 301}/{5 * 10^5} = 0.005\, m^3$$ 0.5

$\boxed{V_B = 5\, l}$ 0.5

<u>Sommet C</u> : $\boxed{V_C = V_A = 25\, l}$ (puisque la transformation CA est un isochore). 0.25

$$P_C V_C = RT_C \Rightarrow T_C = {P_C V_C}/{R} = {5 * 10^5 * 25 * 10^{-3}}/{8.31} = 1504\, K$$ 0.5

$\boxed{T_C = 1504\, K}$ 0.25

بالتوفيق

2- Calcul des travaux et les chaleurs.

- AB est un isotherme ($T_A = T_B = 301\ K$)

0.25

$$W_{AB} = -\int_A^B PdV = -\int_{V_A}^{V_B} RT_A \frac{dV}{V} = -RT_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = -RT_A(lnV_B - lnV_A) = RT_A ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)$$

0.25

$$W_{AB} = 8.31 * 301 * ln\left(\frac{25}{5}\right) = 4025.7\ J = 4.025\ KJ$$

$$\boxed{W_{AB} = 4.025\ KJ}$$ 0.25

0.25

Le gaz parfait ne dépend que de la température $\Rightarrow \Delta U_{AB} = 0 = W_{AB} + Q_{AB} \Rightarrow Q_{AB} = -W_{AB} = -4.025\ KJ$

$$\boxed{Q_{AB} = -4.025\ KJ}$$ 0.25

- BC est un isobare ($P_B = P_C = 5\ bars$)

$$W_{BC} = -\int_B^C PdV = -P_B \int_{V_B}^{V_C} dV = P_B(V_B - V_C) = 5 * 10^5 * (5 - 25) * 10^{-3} = -10000\ J = -10\ KJ$$

0.25

$$\boxed{W_{BC} = -10\ KJ}$$ 0.25

Avec $\Delta U_{BC} = W_{BC} + Q_{BC} \Rightarrow Q_{BC} = \Delta U_{BC} - W_{BC} = C_V(T_C - T_B) - W_{BC} = {}^3/_2\, R(T_C - T_B) - W_{BC}$

0.25

$$Q_{BC} = {}^3/_2 * 8.31 * (1504 - 301) - (-10) = 25\ KJ$$

$$\boxed{Q_{BC} = 25\ KJ}$$ 0.25

- CA est un isochore ($V_C = V_A = 25\ l$)

$$W_{CA} = 0 \Rightarrow Q_{CA} = \Delta U_{CA} = C_V(T_A - T_C) = {}^3/_2\, R(301 - 1504) = -14995\ J \approx -15\ KJ$$

0.25

$$\boxed{Q_{CA} = -15\ Kj}$$ 0.25

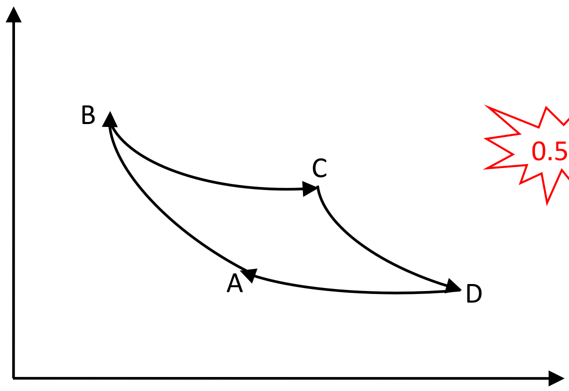
Calcul de leur somme

0.25

$$\Delta U_{tot} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} + Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 4.025 - 10 + 0 - 4.025 + 25 - 15 = 0\ KJ$$

Exercice 3 **(08 points)**

1- **Représentation de cycle (diagramme de Clapeyron)**



0.5

2- **Démonstration**

AB et CD sont deux adiabatiques ($PV^\gamma = cste$)

$$\Rightarrow P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$ 0.25

$$\Rightarrow P_C V_C^\gamma = P_D V_D^\gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$ 0.25

بالتوفيق

BC et DA sont des isothermes

$$\left.\begin{array}{l} P_B V_B = nRT_1 \\ P_C V_C = nRT_1 \end{array}\right\} \Rightarrow P_B V_B = P_C V_C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$ 0.25

$$\left.\begin{array}{l} P_D V_D = nRT_2 \\ P_A V_A = nRT_2 \end{array}\right\} \Rightarrow P_D V_D = P_A V_A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$ 0.25

$$(3) * (4) \Rightarrow P_B V_B P_D V_D = P_C V_C P_A V_A \Rightarrow P_A P_C V_A V_C = P_B P_D V_B V_D \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$ 0.25

$$(1) * (2) \Rightarrow P_A P_C V_A^{\gamma} V_C^{\gamma} = P_B P_D V_B^{\gamma} V_D^{\gamma} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$ 0.25

Faisons le rapport entre les relations (5) et (6)

$$\Rightarrow \frac{V_A V_C}{V_A{}^{\gamma} V_C{}^{\gamma}} = \frac{V_B V_D}{V_B{}^{\gamma} V_D{}^{\gamma}} \Leftrightarrow \frac{V_A V_C}{(V_A V_C)^{\gamma}} = \frac{V_B V_D}{(V_B V_D)^{\gamma}} \Leftrightarrow (V_A V_C)^{1-\gamma} = (V_B V_D)^{1-\gamma} \boxed{\Rightarrow V_A V_C = V_B V_D}$$ 0.25

De (5) $\boxed{\Rightarrow \ P_A P_C = P_B P_D}$ 0.25

3- **Les travaux**

0.25

- AB est une transformation adiabatique $\Rightarrow Q_{AB} = 0 \quad \Rightarrow W_{AB} = \Delta U_{AB} = nC_V \Delta T = {}^3\!/_2\, R(T_B - T_A)$

$$\boxed{W_{AB} = {}^3\!/_2\, nR(T_B - T_A)}$$ 0.25

- BC est un isotherme $(T_B = T_C)$:

$$W_{BC} = -\int_B^C PdV = -nRT_1 \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} = nRT_1 ln\left(\frac{V_B}{V_C}\right)$$

0.25

$$\boxed{W_{BC} = nRT_1 ln\left(\frac{V_B}{V_C}\right)}$$ 0.25

- CD est une transformation adiabatique :

0.25

$$Q_{CD} = 0 \Rightarrow W_{CD} = \Delta U_{CD} = nC_V \Delta T = {}^3\!/_2\, nR(T_D - T_C)$$

$$\boxed{W_{CD} = {}^3\!/_2\, nR(T_D - T_C)}$$ 0.25

- DA est un isotherme $(T_D = T_A)$:

$$W_{DA} = -\int_D^A PdV = -nRT_2 \int_{V_D}^{V_A} \frac{dV}{V} = nRT_2 ln\left(\frac{V_D}{V_A}\right)$$

0.25

$$\boxed{W_{DA} = nRT_2 ln\left(\frac{V_D}{V_A}\right)}$$ 0.25

4- **La relation entre W_{AB} et W_{CD}**

$$W_{AB} = {}^3\!/_2\, nR(T_B - T_A) = {}^3\!/_2\, nR(T_1 - T_2)$$

$$W_{CD} = {}^3\!/_2\, nR(T_D - T_C) = {}^3\!/_2\, nR(T_2 - T_1)$$

$$\boxed{\Rightarrow W_{AB} = -W_{CD}}$$ 0.5

AB est une adiabatique $Q_{AB} = 0 \Rightarrow \Delta U_{AB} = U_B - U_A = W_{AB}$

$$U_B - U_A = W_{AB}$$

CD est une adiabatique $Q_{CD} = 0 \Rightarrow \Delta U_{CD} = U_D - U_C = W_{CD}$

$$U_D - U_C = W_{CD}$$ 0.25

BC et DA sont des isothermes $\Delta U_{BC} = 0 \Rightarrow U_B = U_C$ et $\Delta U_{DA} = 0 \Rightarrow U_D = U_A$

Alors

$$W_{AB} = U_B - U_A = U_C - U_D = -(U_D - U_C) = -W_{CD}$$ 0.25

On retrouve le même résultat.

5- **Les quantités de chaleurs**

AB et CD sont des adiabatiques $\Rightarrow Q_{AB} = Q_{CD} = 0.$ 0.25

BC et DA sont des isothermes $\Rightarrow \begin{cases} Q_{BC} = -W_{BC} = -nRT_1 ln\left(\frac{V_B}{V_C}\right) > 0 \\ Q_{DA} = -W_{DA} = -nRT_2 ln\left(\frac{V_D}{V_A}\right) < 0 \end{cases}$ 0.25 0.25

6- **La relation entre Q_{BC} et Q_{DA}**

De la relation déjà démontrer $V_A V_C = V_B V_D \Rightarrow \frac{V_B}{V_C} = \frac{V_A}{V_D}$ 0.25

$$\Rightarrow \frac{Q_{BC}}{T_1} = -\frac{Q_{DA}}{T_2} \Rightarrow \boxed{\frac{Q_{BC}}{T_1} + \frac{Q_{DA}}{T_2} = 0}$$ 0.25

7- **Le travail total**

$\boldsymbol{W} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = W_{AB} - W_{AB} + W_{BC} + W_{DA} = W_{BC} + W_{DA} = nRT_1 ln\left(\frac{V_B}{V_C}\right) - nRT_2 ln\left(\frac{V_A}{V_D}\right)$

$$\boxed{\boldsymbol{W} = nRln\left(\frac{V_B}{V_C}\right)(T_1 - T_2) < 0}$$ 0.5

Car $V_B < V_C \Rightarrow ln\left(\frac{V_B}{V_C}\right) < 0$ et $T_1 > T_2$ 0.25

8- **Le rendement du cycle**

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_A}{T_B} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0.07 = 7\%}$$ 0.5

بالتوفيق